Il calcolatore alla lavagna

Come dimostrare un teorema con l’aiuto di una macchina

Cos’è una dimostrazione

- Una dimostrazione di un teorema è una successione di passi logici che partendo da assiomi (affermazioni non dimostrate, ma prese come base per il castello logico in costruzione) o teoremi già dimostrati porta alla conclusione che una certa affermazione è vera o falsa.

Il sogno di Leibniz

- Leibniz vide che molte dimostrazioni seguono schemi precisi e ripetitivi, quindi immaginò di poter definire un insieme di regole, da applicare in successione (oggi diremmo un algoritmo), che permettano di dimostrare, data un’affermazione in un sistema di assiomi, se questa è vera o falsa.
  – Altri riproposero in seguito la stessa idea, sperando da arrivare a metodi di dimostrazione relativamente semplici e infallibili.

L’ultimo sognatore

- Hilbert, nel proporre la famosa lista di 23 problemi per il nuovo secolo, agli inizi del ‘900, mostrava implicitamente di ritenere che il sogno di Leibniz fosse realizzabile.

Un brusco risveglio

- Nel 1931 Kurt Gödel provocò un brusco risveglio dei sognatori, ponendoli di fronte a una dura (e completamente imprevista) realtà.
- Il suo teorema di incompletezza dimostra che nella matematica esistono **infinite affermazioni non dimostrabili**!
  - Non può esistere un procedimento automatico che posto di fronte a un'affermazione sia sempre in grado di stabilire se sia vera o falsa.

Un altro duro colpo

- Nel 1937 Alan Turing dimostrò la versione informatica del teorema di Gödel: non esiste alcun procedimento automatico capace di stabilire se un programma terminerà o meno.
  – Un risultato notevole, tenuto conto che i “calcolatori” dell’epoca erano macchine a ingranaggi.

Una flebile speranza (1)

- Negli anni ’70 si riaccese una piccola speranza: furono scritti programmi capaci di dimostrare teoremi, a partire da assiomi dati.
- Parallelamente furono sviluppati programmi che tentavano di dimostrare la correttezza di algoritmi; in pratica la correttezza di altri programmi.

Una flebile speranza (2)

- Questi programmi procedevano praticamente per tentativi, applicando le regole di inferenza una dopo l’altra in tutte le combinazioni possibili o quasi, in sequenze via via più lunghe.
- In pratica procedevano come se cercassero l’uscita da un labirinto facendo tutte le possibili sequenze di passi.

Una flebile speranza (3)

- All’inizio non dimostrarono altro che banalità assolute, ma la speranza era che aumentando le risorse disponibili (memoria e velocità di elaborazione), sarebbero riusciti a dimostrare qualcosa di utile.
- 50 anni dopo abbiamo macchine con memoria e velocità di calcolo aumentate di un fattore un milione, ma non sono stati raggiunti risultati importanti.
  - I teoremi dimostrati sono di livello elementare, gli algoritmi dimostrati corretti sono quasi tutti relativamente semplici.

Una macchina inutile?

- Allora i calcolatori non aiutano nella dimostrazione di teoremi?
- Non proprio: vi sono stati alcuni casi clamorosi, che hanno portato a una **revisione del concetto stesso di dimostrazione matematica**.

Non del tutto inutile

- Un calcolatore può essere di enorme aiuto, non solo nell’eseguire calcoli, ma anche nell’esaminare un gran numero di casi, laddove si riesca a dare criteri ragionevoli di accettazione o rifiuto.

I primi utilizzi (1)

- Dagli anni ’50 i calcolatori sono stati largamente utilizzati in matematica:
  - sono state calcolate miliardi di cifre decimali di costanti come e, π, γ, laddove a mano si arrivava a poche centinaia, a prezzo di immensi sforzi;
  - è stato dimostrato che $2^{82589933} - 1$ è primo; a mano è un’impresa anche solo scrivere le sue 24862048 cifre decimali;
  - sono stati trovati i fattori primi di $2^{2048} + 1$, un numero di 617 cifre.

I primi utilizzi (2)

- In questi casi si è solo sfruttata l'enorme velocità nell'esecuzione di calcoli numerici.
  - Sono stati scritti programmi complessi, sono stati sviluppati metodi nuovi, ma il calcolatore è servito solo come un potente e veloce, ma stupido, pallottoliere.
- Soprattutto non sì è trattato di **dimostrare teoremi**, ma solo di **calcolare numeri**; il fatto che i calcoli non siano verificabili manualmente non ha molta importanza.
  - Possono essere ripetuti su calcolatori diversi.
  - Non dimostrano alcun teorema, al massimo qualche proprietà di alcuni numeri particolari.

Un diverso approccio

- Mezzo secolo fa alcuni cominciarono a pensare a un diverso approccio: la possibilità di usare un calcolatore per eseguire calcoli di natura non **aritmetica**, ma **combinatoria**: provare diverse combinazioni di strutture, alla ricerca di alcune con determinate proprietà, guidato dall'intelligenza e dall'esperienza umane.
- Il risultato finale però, sebbene corretto, resta fuori dalle possibilità di verifica umana, sollevando la questione:

E' una dimostrazione?

Il teorema dei quattro colori

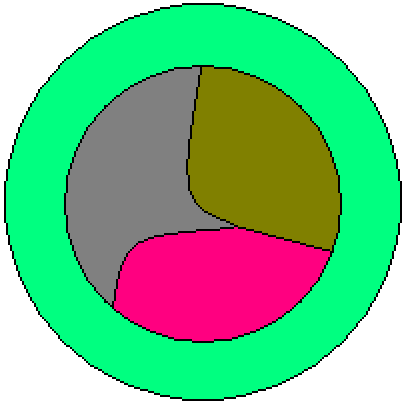
- Il teorema dei quattro colori appartiene a quel gruppo di domande che anche un bambino può capire, ma che hanno richiesto secoli e grandi ingegni per trovare una risposta.

Il problema

- I cartografi usano colorare le mappe in modo che stati o regioni confinanti siano in colori diversi, per distinguerli più facilmente.
  - Per “confine” s’intende un tratto di linea, non un punto, altrimenti una torta tagliata in tante fette richiederebbe un numero arbitrariamente grande di colori.
  - Inoltre le aree devono essere continue e compatte: “regioni” costituite da nuvole di punti disconnessi non sono ammesse.
- Nel 1852 Francis Guthrie, nel costruire la mappa delle contee inglesi, si chiese se 4 colori bastino e il problema arrivò all’attenzione degli esperti.

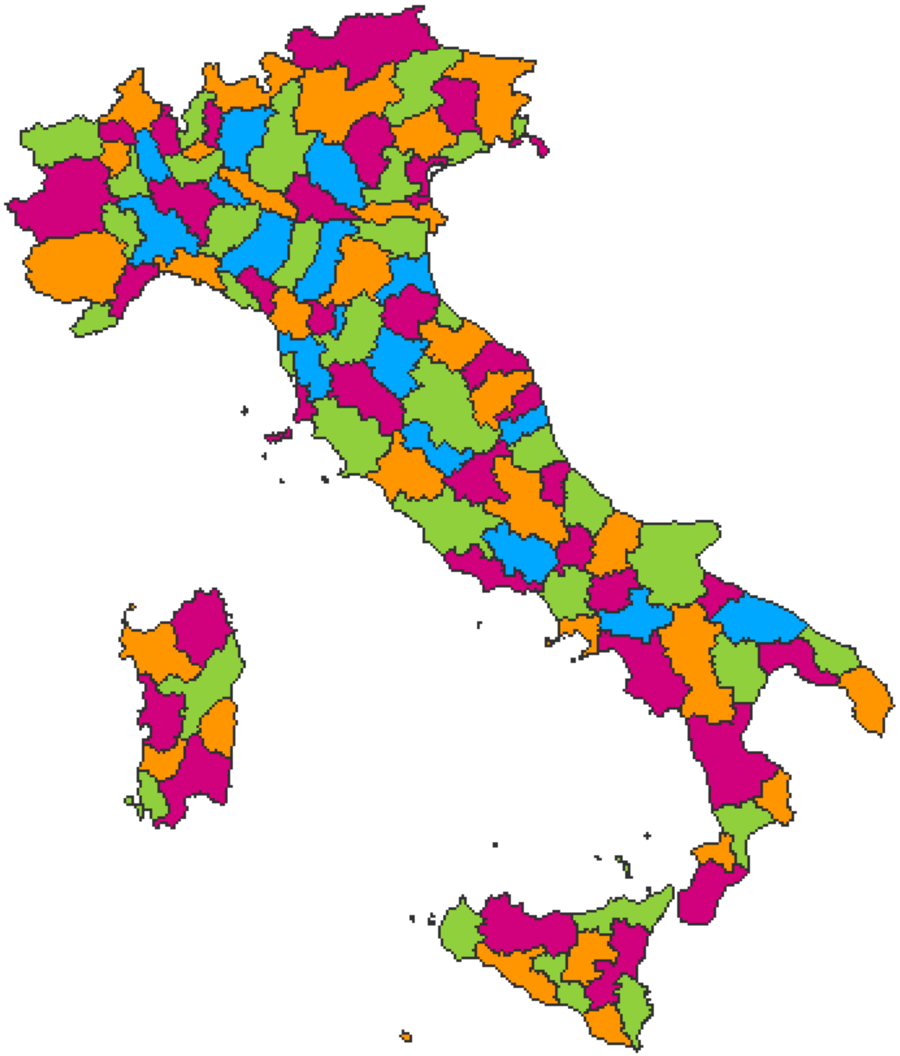
I colori (1)

- È facile disegnare 4 regioni mutuamente a contatto, quindi 4 colori sono necessari.



I colori (2)

- Può sembrare che all'aumentare della complessità della mappa servano più colori.
  - Però tornando indietro e cambiando il colore di alcune regioni già colorate, si riesce a farcela con 4.

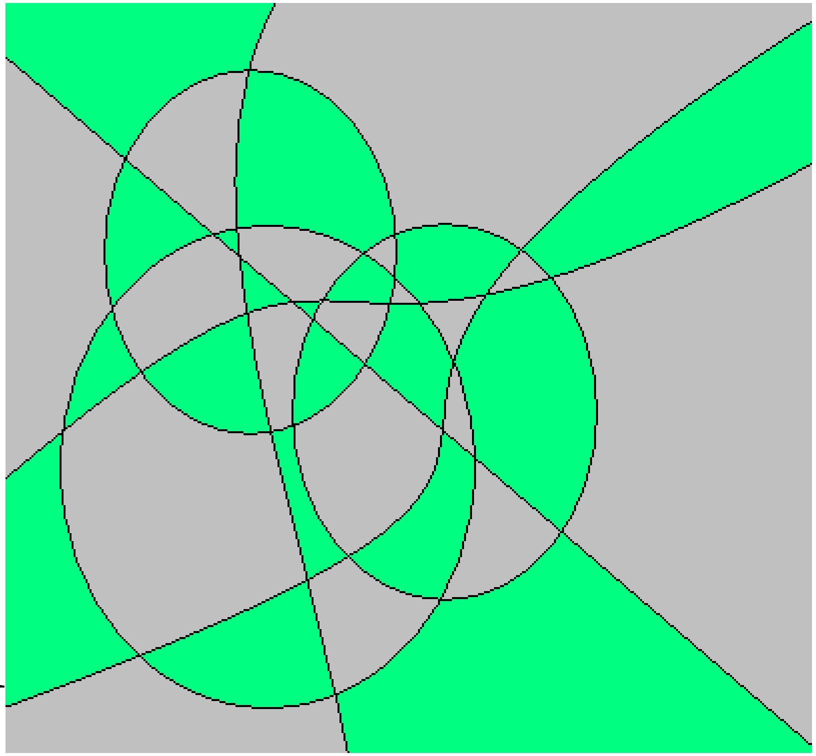


Un primo attacco

- Una possibile strategia d’attacco è individuare le caratteristiche della minima mappa che richiederebbe 5 colori, poi mostrare che la si può colorare con 4.
  - In questo modo si dimostrò che 6 colori bastano.

Una dimostrazione di Kempe

- Alfred Bray Kempe
  Kempe dimostrò che una mappa disegnata solo con linee chiuse e linee che si estendono all'infinito, in modo che non vi siano intersezioni di 3 o più linee nello stesso punto, si può colorare con 2 soli colori.

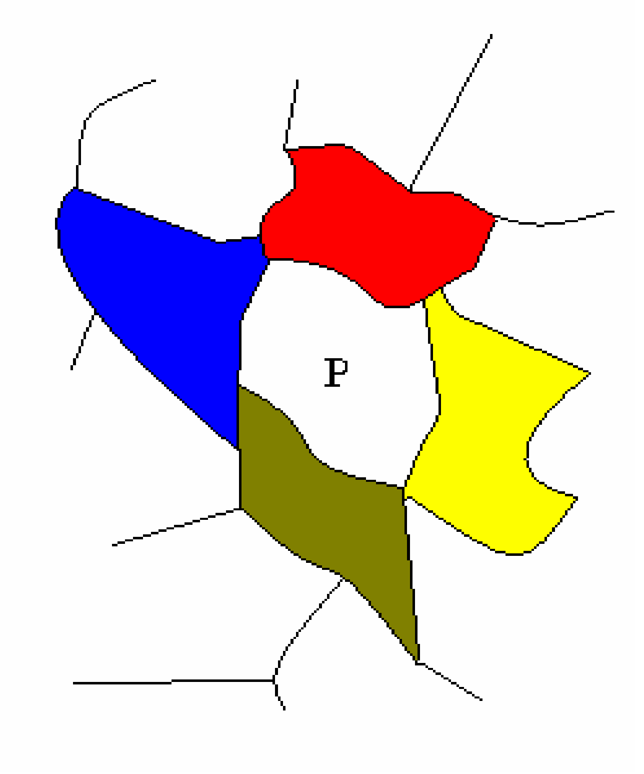


La prima dimostrazione

- Kempe pubblicò nel 1879 una dimostrazione, semplice e ingegnosa.
  - L'idea di Kempe era dimostrare che un controesempio minimo (detto “mappa anomala”) deve contenere una regione confinante con meno di altre 6, poi dimostrare che una mappa con una regione del genere può essere ridotta a una con una regione in meno, quindi si può ripristinare la regione, senza aumentare il numero di colori, pertanto la mappa iniziale non può essere minima.
    - Si basava sul dimostrare che un controesempio minimo sarebbe stato costituito da quadrilateri e pentagoni.

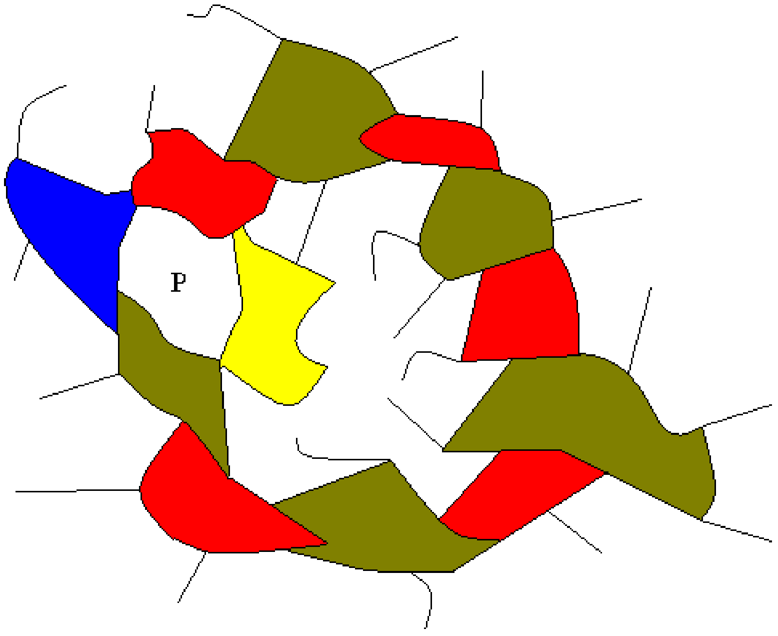
Le “catene di Kempe” (1)

- Nel caso del quadrilatero, si verifica una situazione di questo tipo.
  - Consideriamo le catene di regioni rosse e verdi confinanti tra loro e connesse alle due confinanti con P.
  - Se sono separate, si invertono i colori delle regioni di una di esse e si porta P a confinare con regioni di solo 3 colori diversi.



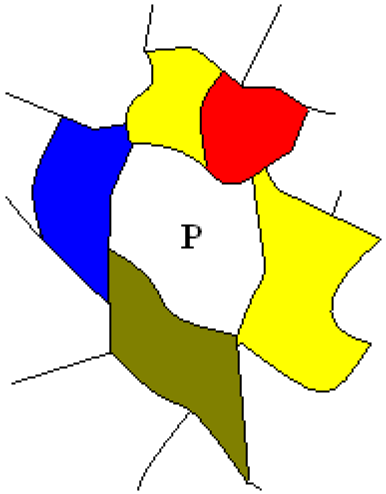
Le “catene di Kempe” (2)

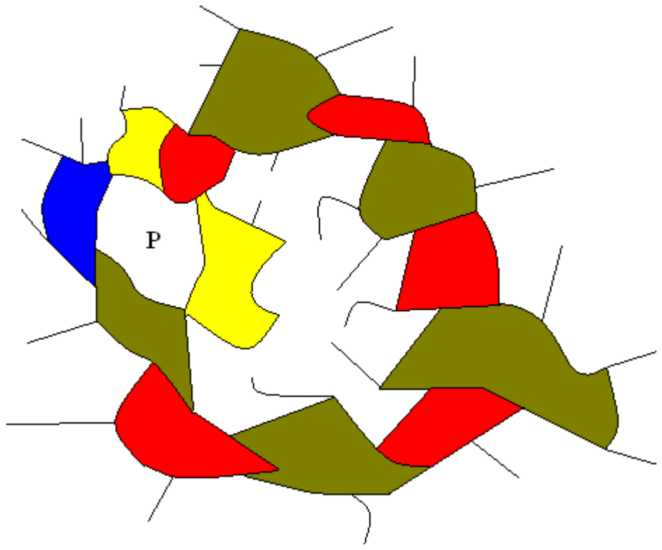
- Altrimenti la catena di regioni rosse e verdi circonda una delle rimanenti due regioni; nell’area circondata si invertono i colori delle regioni gialle e blu e di nuovo P confina con regioni di soli 3 colori.



Le “catene di Kempe” (3)

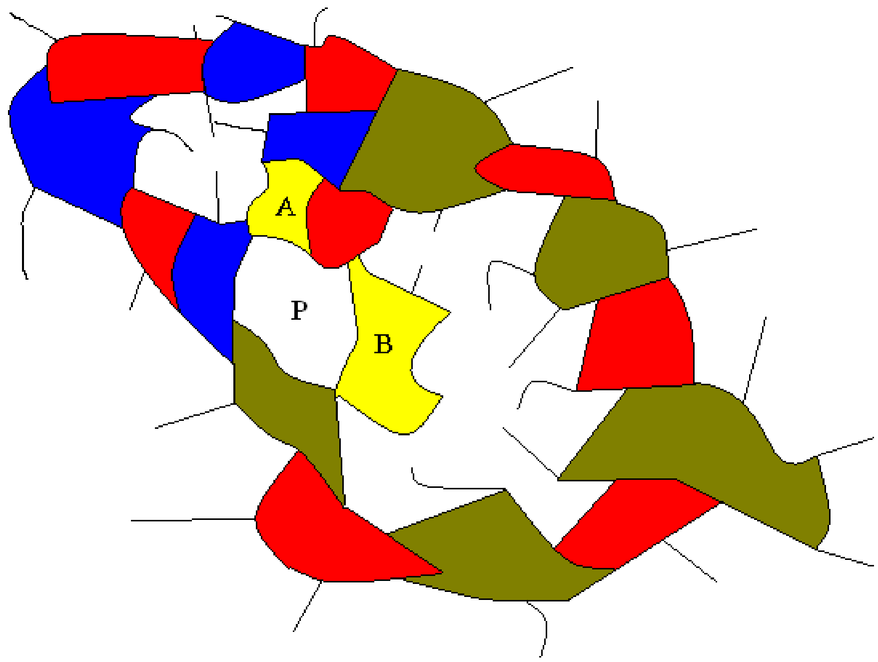
- Il pentagono è più complicato: deve confinare con 2 regioni dello stesso colore (giallo).
- Si forma la solita catena di regioni rosse e verdi, circondando una regione gialla.





Le “catene di Kempe” (4)

- Si può formare allo stesso modo una catena di regioni blu e rosse che circonda l’altra regione gialla.
- Per finire s’invertono i colori delle catene gialle e blu connesse a B (che diventa blu) e di quelle verdi e gialle connesse ad A (che diventa verde) e si può colorare P di giallo.

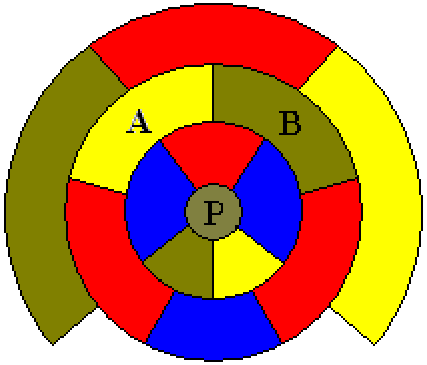


L’errore

- Elegante la dimostrazione di Kempe, vero?
- Peccato che sia sbagliata!
- Solo nel 1889 Percy John Heawood evidenziò un sottile errore: le due catene di regioni (rosse e verdi nella prima, rosse e blu nella seconda) possono intersecarsi, interferendo in modo da distruggere la dimostrazione.
  - Le due inversioni di colori richieste sono possibili separatamente, ma se eseguite insieme possono portare a colorare con lo stesso colore due regioni a contatto.

I controesempi

- Heawood produsse una mappa con 25 regioni che distruggeva la dimostrazione di Kempe.
- Nel 1896 Charles Jean Etienne Gustave Nicolas Baron de la Vallee Poussin produsse un esempio più semplice, con sole 14 regioni.
  - Applicando la tecnica di Kempe le regioni A e B diventano entrambe rosse.
- In seguito furono trovati controesempi con 9 sole regioni.



Un successo parziale

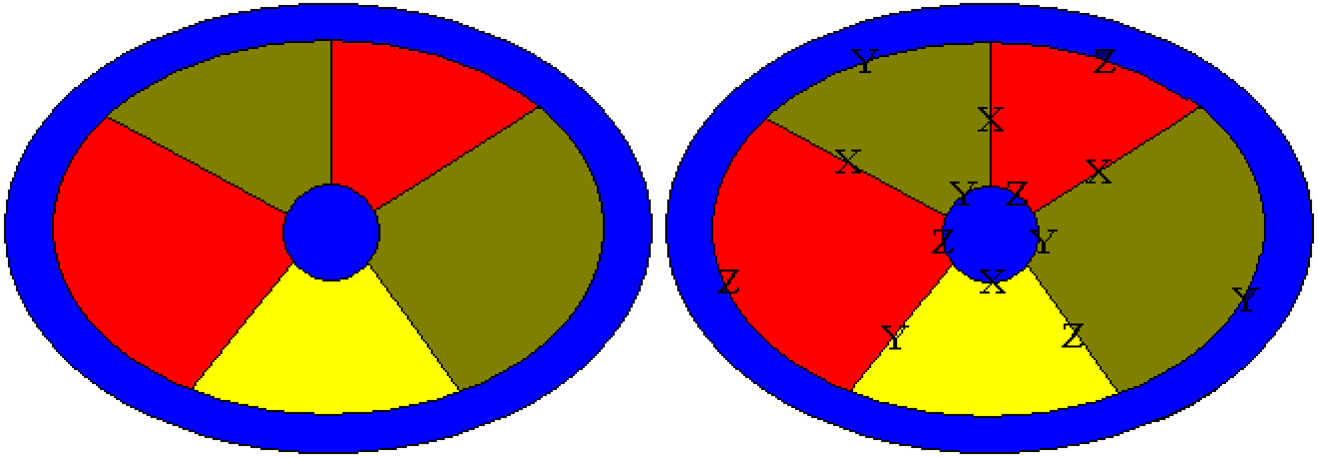
- Tutti i controesempi sono colorabili con 4 colori, ma non ci si arriva usando la tecnica di Kempe.
- Heawood adattò la dimostrazione di Kempe per mostrare che 5 colori bastano, ma non riuscì a “ripararla” per 4 colori.

La dimostrazione di Tait (1)

- Peter Guthrie Tait tentò nel 1880 un diverso approccio, colorando le linee di confine, invece delle regioni.
  - Una mappa si dice “cubica” se nelle congiunzioni tra linee di confine si uniscono sempre esattamente tre linee.
  - Tait dimostrò che, aggiungendo regioni, qualsiasi mappa può essere trasformata in una mappa cubica a parità di numero di colori e il procedimento può essere invertito.
  - Quindi esiste una mappa che richiede più di 4 colori se e solo se esiste un’equivalente mappa cubica.

La dimostrazione di Tait (2)

- Tait propose questa colorazione per i confini:
  - colore X per le linee che separano regioni colorate con rosso e verde o con giallo e blu;
  - colore Y per le linee che separano regioni colorate con rosso e giallo o con verde e blu;
  - colore Z per le linee che separano regioni colorate con rosso e blu o con verde e giallo.



La dimostrazione di Tait (3)

- Il procedimento ha l'inattesa conseguenza che se i confini di una mappa cubica sono colorati con al massimo tre colori, ai vertici si uniscono tre linee colorate con tre colori diversi e viceversa se ai vertici di una mappa cubica si uniscono tre linee colorate con tre colori diversi, invertendo il procedimento di colorazione si ottiene una mappa colorata con al massimo 4 colori.
- Pertanto partendo da una colorazione delle linee di una mappa cubica, tale che in ogni vertice si uniscano tre linee colorate con tre colori diversi, si ottiene una colorazione della mappa con al massimo 4 colori

La dimostrazione di Tait (4)

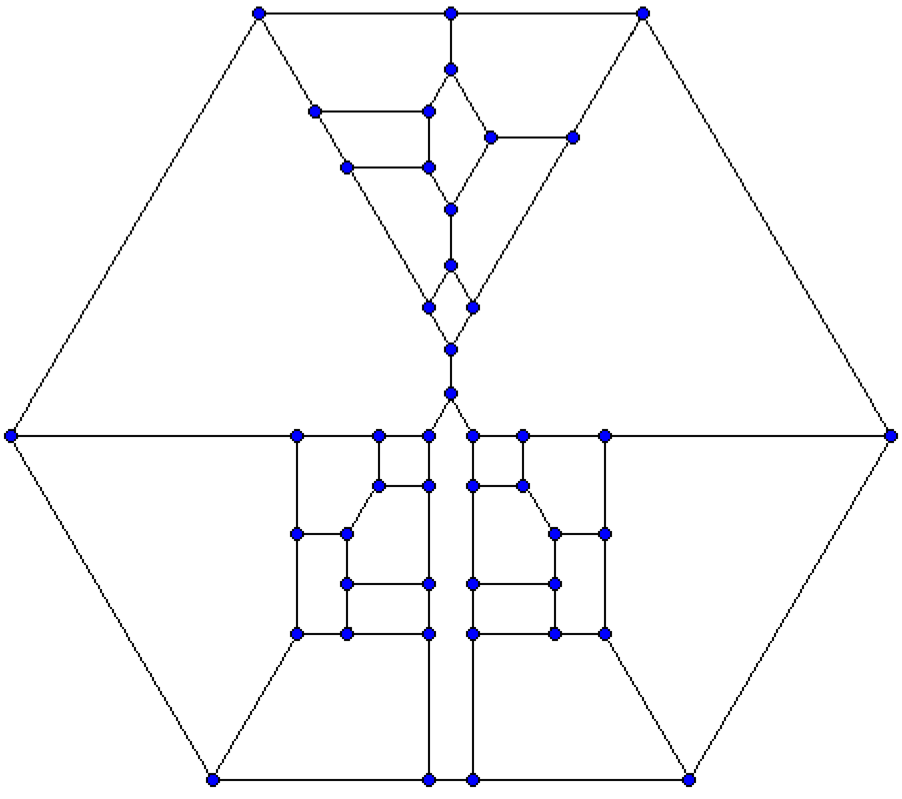
- Sfortunatamente però bisogna dimostrare che una colorazione del genere delle linee è sempre possibile, cosa che Tait considerava un semplice lemma, ma che in realtà è altrettanto difficile da dimostrare del teorema dei 4 colori.
  - Alla fine l'affermazione di Tait fu dimostrata come conseguenza del teorema dei quattro colori.

La dimostrazione di Tait (5)

- Tait dimostrò che se un **grafo planare, cubico e 3-connesso** (cioè tale che bisogna togliere almeno 3 archi per dividerlo in parti separate) ammette un **circuito hamiltoniano**, (ossia un percorso che passi esattamente una volta da ogni vertice), allora può essere colorato con tre colori rispettando le condizioni.
  – Era convinto, come molti altri, che un tale circuito esistesse per ogni grafo del genere, ma non riuscì a dimostrarlo, anche perché **non è vero**.

Il controesempio

- Solo nel 1946 William Thomas Tutte trovò un grafo planare, cubico e 3-connesso, che non ammette un circuito hamiltoniano.
  - La corrispondente mappa si colora con 4 colori.



Una diversa strategia (1)

- Kempe aveva dimostrato che una mappa anomala minima deve contenere una regione confinante con meno di altre 6, poi voleva dimostrare che una mappa del genere può essere ridotta a una con una regione in meno, quindi si può ripristinare la regione, senza aumentare il numero di colori, pertanto la mappa iniziale non può essere minima.
  - In pratica dimostrò che esiste un **insieme inevitabile di configurazioni** (nel suo caso, regioni confinanti con meno di altre 6) e che tali configurazioni **possono essere ridotte** a una mappa con una regione in meno, per ipotesi non anomala, quindi colorabile con quattro colori.

Intermezzo (1)

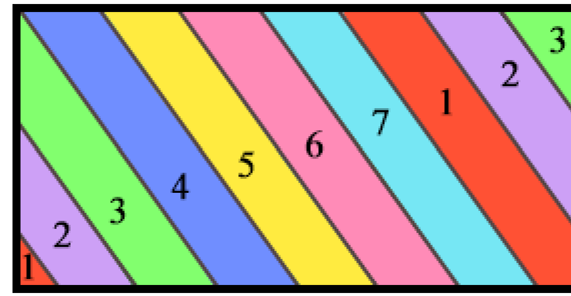
- Heawood propose il problema del numero minimo di colori per colorare una mappa su una ciambella con *n* fori.
  - Suppose che il numero di colori sia il massimo intero non superiore a $\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}$.
  - Dimostrò la formula per il caso $n = 1$, ossia per il toro.
  - Lothar Heffter dimostrò che la congettura è vera per $n < 7$.

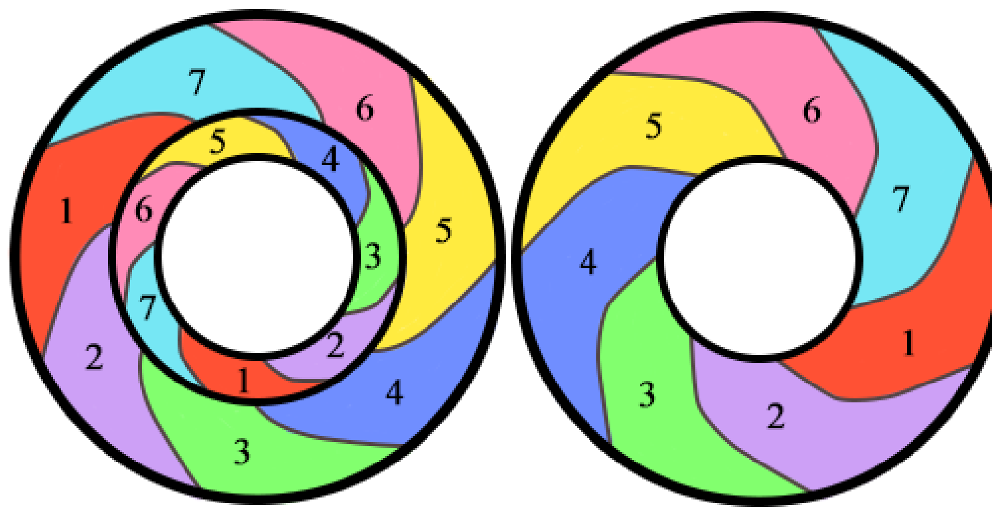
Intermezzo (2)

- Il problema venne suddiviso poi in 12 casi, corrispondenti ai possibili resti ottenuti dividendo il numero di buchi per 12, più 7 casi speciali.
  - Tra il 1954 e il 1968 vari matematici affrontarono e risolsero tutti i casi, dimostrando che la formula di Heawood era corretta.
- Nel 1910 Heinrich Tietze aveva dimostrato che sulla striscia di Möbius bastano 6 colori.
- Quindi all’inizio degli anni ’70 il problema era stato risolto per una varietà di superfici stravaganti… ma non per il “banale” piano!

Il toro (1)

- Prendendo la striscia colorata con 7 colori e arrotolandola a formare un toro, si ottiene una configurazione di 7 regioni, ciascuna confinante con tutte le altre.





Il toro (2)

- Per quanto sembri incredibile, si può ottenere la stessa configurazione con un poliedro: il poliedro di Szilassi ha 7 facce, ciascuna con uno spigolo in comune con tutte le altre.

Una diversa strategia (2)

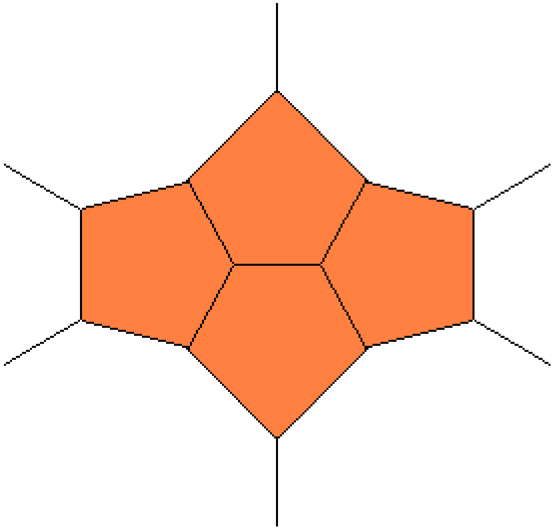
- In pratica Kempe aveva usato il pentagono come configurazione inevitabile, ma non era riuscito a ridurre la mappa; altri tentarono quindi di ampliare l'insieme di configurazioni inevitabili.
  - Nel 1903 Paul Wernick dimostrò che che una mappa cubica che non contenga regioni confinanti con meno di 5 altre deve contenere o due pentagoni confinanti o un pentagono confinante con un esagono.
  - Nel 1920 Philip Franklin dimostrò che una mappa anomala cubica minima deve contenere un pentagono confinante con altre due regioni con 5 o 6 lati.

Una diversa strategia (3)

- Mentre alcuni si dedicavano ad ampliare l’insieme delle configurazioni inevitabili, altri cercavano di ampliare l’elenco di quelle riducibili, che una minima mappa anomala non può contenere.
  - In particolare si dimostra che in una mappa anomala minima tutte le regioni devono confinare con almeno 5 altre.
  - In tal caso però i pentagoni devono essere almeno 12, ma la minima mappa con 12 pentagoni è equivalente alla proiezione del dodecaedro ed è facilmente colorabile.
  - Ne segue che la minima mappa anomala deve contenere almeno 13 regioni.

Una diversa strategia (4)

- Nel 1913 George David Birkhoff dimostrò l’esistenza di varie configurazioni riducibili, tra le quali il “diamante di Birkhoff”.



Una diversa strategia (5)

- Rendendo sempre più complesse le configurazioni inevitabili e quelle riducibili, fu possibile aumentare il numero minimo di regioni di un’eventuale mappa anomala.
  - Nel 1922 Philip Franklin dinostrò che una mappa anomala deve contenere almeno 25 regioni.
  - Nel 1926 Clarence Reynolds portò il limite a 27.
  - Nel 1938 Franklin rispose alzandolo a 31.
  - Nel 1940 C.E. Winn lo aumentò a 35.
  - Nel 1967 Oystein Ore e Joel Stemple fissarono l’ultimo record a 40.

Non si arriva oltre (a mano)

- La dimostrazione di Ore e Stemple richiedeva l'esame di un tal numero di configurazioni, che non fu mai ufficialmente completata (**nessuno voleva controllarla**).
- Nel 1950 Heinrich Heesch scoprì un metodo per dimostrare la riducibilità di varie configurazioni, esaminò migliaia di configurazioni e si convinse che un insieme inevitabile di configurazioni riducibili esistesse, ma che poteva contenere oltre 10000 configurazioni.

Speranze e delusioni (1)

- Le regioni che confinano con una configurazione riducibile formano un anello chiuso intorno a essa; la difficoltà per dimostrare la riducibilità dipende principalmente dalle dimensioni di questo anello.
  - Nel caso del diamante di Birkhoff, con un anello di 6 regioni, bisogna considerare 31 differenti colorazioni.
  - Sono 199291 per 14 regioni e oltre 16 milioni per 18.
- Dove non arriva l'uomo, può arrivare una macchina…
- Dal 1965 Heesch collaborò con Karl Dürre, che scrisse un programma in grado di dimostrare la riducibilità di varie configurazioni.
  - Il calcolatore che usavano, impiegava circa 6 ore per esaminare le configurazioni con anello di 12 regioni e tra 16 e 61 per quelle con anelli di 13 regioni.

Speranze e delusioni (2)

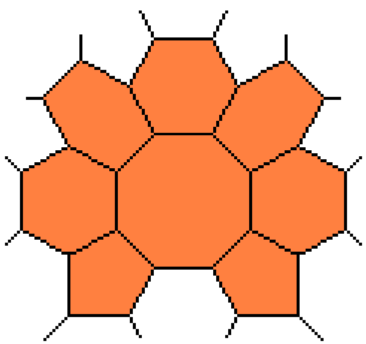
- Negli anni ’60 Edward F. Moore tentò di trovare una mappa non colorabile.
- Non riuscì, ma una sue mappa non conteneva alcuna configurazione riducibile con anello di 11 regioni, quindi Moore dimostrò che una dimostrazione del teorema avrebbe richiesto l’esame di configurazioni con anello di almeno 12 regioni
- Nel frattempo Heesch s’era convinto che sarebbe probabilmente stato necessario arrivare a 18 e bisognava esaminarne migliaia.

Strada sbarrata?

Speranze e delusioni (3)

- Nello stesso periodo Yoshio Shimamoto stava lavorando a un diverso metodo: cercare di ridurre l'insieme di configurazioni inevitabili.
- Nel 1971 durante una noiosa riunione cominciò a scarabocchiare mappe su un foglio e improvvisamente si rese conto d'avere tra le mani una dimostrazione sorprendente: il teorema dei 4 colori sarebbe stato dimostrato se questa configurazione, da allora nota come "ferro di cavallo di Shimamoto", fosse stata riducibile.

Era come se avesse rimpiazzato il pentagono che aveva fatto fallire la dimostrazione di Kempe con un'altra configurazione, una sola!



Speranze e delusioni (2)

- Shimamoto si mise in contatto con Heesch e Dürre per sapere se la configurazione era riducibile; dopotutto l’anello del suo ferro di cavallo conteneva solo 14 regioni.
- Dopo 26 ore di calcolo la macchina emise il verdetto, purtroppo negativo.
- In seguito Hassler Whitney e William Tutte analizzarono il lavoro di Shimamoto, dimostrando che sfortunatamente non solo il ferro di cavallo, ma **qualsiasi configurazione singola** ottenibile col suo metodo non era riducibile.

Speranze e delusioni (3)

- Nel 1970 Heesh inviò a Wolfgang Haken il risultato delle sue ricerche: un insieme di circa 8900 configurazioni, con anelli con fino a 18 regioni.
  - Se fossero riusciti a dimostrarle riducibili, avrebbero dimostrato il teorema, ma la tecnologia dell’epoca non permetteva di arrivare neppure vicino a esaminare anelli del genere.

Una strada diversa (1)

- Heesch aveva trovato tre ostacoli alla riduzione:
  - una regione confinante con 4 regioni dell’anello, adiacenti tra loro;
  - una regione confinante con 3 regioni dell’anello, non tutte adiacenti tra loro;
  - una regione confinante con 2 pentagoni dell’anello, adiacenti tra loro.
- Haken ebbe l’idea di sfruttare questo fatto per escludere alcuni tipi di mappe e capovolgere l’approccio: mentre altri catalogavano **configurazioni riducibili**, sperando di estrarne un insieme inevitabile, il matematico americano pensò di individuare un insieme di **configurazioni inevitabili**, che offrissero speranze di essere riducibili.
  - Decise quindi di scartare le configurazioni con gli ostacoli individuati da Heesch.

Una strada diversa (2)

- Kenneth Appel, esperto programmatore, offrì il suo aiuto e i due si misero a cercare configurazioni inevitabili.
  - Nel 1974, dopo un anno di lavoro, dimostrarono di poter produrre vari insiemi di configurazioni inevitabili.

Una sorpresa (1)

- Il programma di Appel e Haken incorporava varie regole, stabilite dagli autori e le combinava in quasi tutti i modi possibili.
- Dopo un po' però i due notarono che, grazie alla sua velocità, poteva combinarle in modi ai quali non avevano minimamente pensato:
  - "Elaborava complesse strategie basate su tutti i trucchi che gli erano stati 'insegnati' e spesso questi approcci erano molto più intelligenti di quelli che noi avremmo provato. Incominciò a insegnarci cose su come procedere che non ci saremmo mai aspettate. " (Haken)

Una sorpresa (2)

- Come capita con i programmi per giocare a scacchi, il programma era divenuto più bravo dei suoi ideatori, grazie alla velocità della macchina.
- Restava “solo” da dimostrare che uno degli insiemi inevitabili contenesse solamente configurazioni riducibili.
  - Vari miglioramenti permisero di esaminare anelli di 14 regioni senza problemi, con un programma che era arrivato a contenere 487 “regole” di riduzione.

Vittoria!

- Alla fine di giugno 1976 il lavoro giunse al termine: era stato trovato **un insieme inevitabile di configurazioni riducibile** e il “problema dei quattro colori” era finalmente diventato il “**teorema dei quattro colori**”.
  - Alla fine la dimostrazione era lunga 900 pagine; si basa sulla dimostrazione dell’esistenza un insieme di 1936 **configurazioni inevitabili** (numero ridotto dopo una revisione a 1482 e a 1405 in una successiva versione) e che **ciascuna è riducibile**.

Il calcolatore insegna

- La dimostrazione segnò l’ingresso trionfale dei calcolatori nella ricerca matematica pura: per la prima volta una macchina non solo aveva aiutato nella ricerca della dimostrazione, ma era di fatto **l’artefice della dimostrazione stessa**.

Ma è una “dimostrazione”?

- Il teorema suscitò anche un **vivace dibattito**.
  - I matematici erano abituati a concepire una dimostrazione come un insieme di passi logici, che partendo dalle ipotesi permette di arrivare alle conclusione attraverso un insieme di teoremi, lemmi e corollari, verificabili uno ad uno.
  - La dimostrazione presentata da Appel e Haken però **non può essere verificata da un essere umano**, perché la verifica **manuale** dei vari casi richiederebbe più di una vita.

Il problema

- Alcuni obiettarono che è possibile verificare un algoritmo, ma non la sua implementazione, perché potrebbero esserci errori:
  - nella traduzione dell’algoritmo nel linguaggio di programmazione (FORTRAN, in questo caso);
  - nel compilatore che traduce il programma da FORTRAN a linguaggio macchina;
  - nel sistema operativo;
  - nell’hardware stesso della macchina.

Gli approcci al problema

- Parte delle obiezioni sembrano legate al bagaglio culturale, quindi anche all’età: in una conferenza ci furono obiezioni da parte di gran parte dei partecipanti; come osservò Robin Wilson, mentre quelli al di sopra dei 40 anni non si convincono che una dimostrazione computerizzata sia corretta, quelli al di sotto in genere lamentavano che 900 pagine di lavoro manuale non potevano essere corrette.
- Chi sbaglia di meno, l’uomo o la macchina?

Pareri contrastanti

- Nel 1979 il filosofo Thomas Tymoczko scrisse: “Se accettiamo il teorema dei quattro colori come teorema, siamo costretti a cambiare il senso di ‘teorema’ o, più correttamente, a cambiare il senso del sottostante concetto di prova”.
- Ted Swart con un articolo, che *Journal of Philosophy* **rifiutò di pubblicare**, ma che, pubblicato su riviste matematiche, gli valse un premio per la brillante esposizione, rispose che se in una dimostrazione si possono usare **carta e penna**, non vi è ragione per escludere uno **strumento equivalente**, ma **più affidabile**.

I tempi cambiano

- Nel 1996 Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas trovarono una prova analoga a quella di Appel e Haken, ma che richiede l’esame di sole 633 configurazioni.
  - Grazie ai miglioramenti degli algoritmi e ai progressi dei calcolatori, la verifica richiede ora solo poche ore su un comune PC.
- Nel 2005 Benjamin Werner e Georges Gonthier verificarono la validità della dimostrazione tramite il loro sistema di prova formale Coq.
- Ottennero quindi il risultato di rendere la dimostrazione del teorema dipendente non dalla correttezza del programma di Appel e Haken (o altri equivalenti), ma da quella **del loro**.

E i cartografi?

- Poco cortesemente, i cartografi, dopo aver proposto un problema che ha fatto penare i matematici per un secolo, si sono disinteressati della soluzione!
  - I libri di cartografia di solito **non menzionano la questione**.
  - Usare un colore in più **non è un problema**.
  - Le mappe che usano **solo 4 colori sono rare**.

Looney tunes outro.mp3